§ 线性相关与线性无关

3维空间 线性相关 $\Rightarrow$ 推广

定义: 设 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m\in F^n$. 若 $\exists\lambda_1\cdots\lambda_m$ 不全为零 s.t. $\lambda_1\vec{a}_1+\cdots+\lambda_m\vec{a}_m=0$. 则称 $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m$ **线性相关**，否则称它们**线性无关**.

$\underline{\underline{m=1}}$ $\vec{a}_1$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\vec{a}_1=0$

1° $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m\in F^n$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ $\exists i$ 及 λ_j s.t. $\vec{a}_i=\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\lambda_j\vec{a}_j$ (代数)

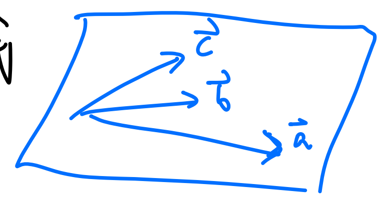
$\Leftrightarrow$ $\exists i$ s.t. $\vec{a}_i\in\langle\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_{i-1},\vec{a}_{i+1},\cdots,\vec{a}_m\rangle$ (几何)

改写

$\Leftrightarrow$ $\exists i$ s.t. $\langle\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m\rangle=\langle\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_{i-1},\vec{a}_{i+1},\cdots,\vec{a}_m\rangle$

例: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}^3$ 共面, $\vec{a},\vec{b}$ 不共线

$\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle=\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$



$\Leftrightarrow$ $(\lambda_1\cdots\lambda_m)A=0$ 有非零解, 其中 $A=\begin{pmatrix}\vec{a}_1\\ \vdots\\ \vec{a}_m\end{pmatrix}$. $\Leftrightarrow$ A 非行满秩 (即: $\mathrm{rank}(A)<m$)

推论: 1) $m>n$: $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 线性相关

2) $m=n$: $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\det(A)=0$.

2° $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m$ 线性无关 $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \lambda_i$ s.t. $\sum \lambda_i \vec{a}_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$.

$$\Leftrightarrow \forall i \ \forall \lambda_j \quad \vec{a}_i \neq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \lambda_j \vec{a}_j$$

$$\Leftrightarrow \forall i, \ \vec{a}_i \notin \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_{i+1}, \cdots, \vec{a}_m \rangle$$

$$\Leftrightarrow \forall i \quad \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m \rangle \neq \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_{i+1}, \cdots, a_m \rangle$$

$\Leftrightarrow$ A 行满秩

$m=n$ $\vec{a}_1, \cdots \vec{a}_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

例：• 包含零向量的任何向量组一个线性相关.

例： $S_1 \subseteq S \subseteq F^n$（有限）. 则

1) S_1 线性相关 $\Rightarrow$ S 线性相关,

2) S 线性无关 $\Rightarrow$ S_1 线性无关.

例： 判定下列线性相关性.

(1). $e_1, \cdots, e_n$ 单位坐标向量 ✓

(2). $a_1 = (1,0,0,\cdots,0)$, $a_2 = (1,1,0,\cdots,0)$, $\cdots$, $a_n = (1,1,1,\cdots,1)$ ✓

(3). a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_1 其中 a_1, a_2, a_3 线性无关. ✓

(4). $a_1 = (3,4,-2,5)$, $a_2 = (2,-5,0,-3)$, $a_3 = (5,0,-1,2)$, $a_4 = (3,3,-3,5)$ ✗

② $2a_1 + a_2 - a_3 - a_4 = 0$.

例： $\vec{a}_i=(a_{i1},\cdots,a_{ir})\in F^r\quad i=1,\cdots,m.$

$\vec{b}_i=(a_{i1},\cdots,a_{ir},\cdots a_{in})\in F^n\quad i=1,\cdots,m.$ 则

(1). $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 线性无关 $\Rightarrow$ $\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_m$ 线性无关、

(2) $\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_m$ 线性相关、$\Rightarrow$ $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 线性相关

几何解释

证： $A=\begin{pmatrix}\vec{a}_1\\ \vdots\\ \vec{a}_m\end{pmatrix}$ ， $B=\begin{pmatrix}\vec{b}_1\\ \vdots\\ \vec{b}_m\end{pmatrix}=(A,C)$

$$B^T\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_m\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}A^T\\ C^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_m\end{pmatrix}=0\Rightarrow A^T\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_m\end{pmatrix}=0$$

$\vec{b}_1\cdots\vec{b}_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $B^TX=0$ 有非零解

$\Rightarrow$ $A^TX=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m$ 线性相关 $\square$